# *Лекция 8*

**Скорость и ускорение точки плоской фигуры**

По заданному закону движения плоской фигуры

можно найти угловую скорость и ускорение фигуры, скорость и ускорение

полюса А. После этого, по теореме о распределении скоростей можно найти скорость произвольной точки В плоской фигуры

Все три вектора лежат в плоскости фигуры. Последнее слагаемое лежит в плоскости фигуры, перпендикулярно АВ и направлено в сторону вращения фигуры (Рис.1). Поэтому это слагаемое называется здесь  ***скоростью точки В вокруг полюса А***



Ускорение точки В найдем, продифференцировав (1) по времени.

Или

Рис.1

Видим, что ускорение произвольной точки В плоской фигуры тоже складывается из ускорения полюса иускорения **WВА** точки В во вращении вокруг полюса А**.**  Ускорение **WВА**, как и должно быть, имеет вращательную составляющую направленную перпендикулярно АВ в сторону углового ускорения  ****и осестремительную составляющую , всегда направленную к полюсу А (Рис.1).

Учитывая, что векторы инаправлены перпендикулярно плоской фигуре, найдем, что

все составляющие лежат в плоскости фигуры и имеют модули:

(3)

Ускорение имеет модуль

Угол  наклона **WAB** к АВ для всех тоек фигуры одинаков

Матричные аналоги формул (1) и (2) в любой системе координат имеют вид:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Мгновенный центр скоростей.**

**Распределение скоростей в плоской фигуре.**

Формула (1) сложна для понимания картины распределения скоростей в плоской фигуре. Картина станет яснее, если ввести понятие ***мгновенного центра скоростей (МЦС)****.* Свяжем с плоской фигурой бесконечную плоскость П.

***МЦС*** *- это*  ***точка плоскости П, скорость которой в данный момент равна нулю***.

Покажем, что МЦС существует, если угловая скорость не равна нулю в данный момент. Для этого умножим векторно слева на  формулу скорости МЦС

Вспомнив формулу двойного векторного произведения

найдем

Отсюда (Рис.2):

Если теперь за полюс принять МЦС , то формула скорости приобретет вид, знакомый нам по вращательному движению:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Таким образом,

***в данный момент скорости распределены в плоской фигуре так,***

***как если бы она вращалась вокруг МЦС* .**

Это значит, что скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна направлению на точку и соблюдаются следующие соотношения:

ω

A

B

Рис.3

ω

ω

Рис.4

Рисунок Рис.3 подсказывает способы построения МЦС в различных случаях:

а) Известны параллельные скорости двух точек на одном перпендикуляре к этим скоростям. В этом случае МЦС лежит на пересечении линии АВ и линии, проведенной через концы векторов скоростей (Рис.4).

б) Случай мгновенно-поступательного движения, когда скорости двух точек параллельны, но точки не лежат на одном перпендикуляре. Примером может служить шатун АВ в указанном на рисунке положении механизма Рис.5. В этом случае перпендикуляры к скоростям пересекаются в бесконечности и

**VA**

**VB= VA**

O

A

B

Рис.5



Рис.6

в) Известны направления скоростей двух точек: Например, скорости точек А и В линейки, скользящей вдоль прямых (Рис.6). МЦС находится на пересечении перпендикуляров к этим скоростям. Кстати, зная положение , легко определить направление скорости произвольной точки С линейки: перпендикулярно направлению на и в сторону вращения. Смотрите анимацию

<http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/ellipse.html>

г) Качение без проскальзывания плоской фигуры по кривой, например колеса по дороге. Точка контакта является мгновенным центром скоростей. Часто окружность колеса ошибочно принимают за траекторию точки А и ее скорость ошибочно направляют по касательной к ободу колеса, в то время как она перпендикулярна А.

Р



Рис.7

Как видим, ни одна точка колеса не имеет скорости, направленной против движения колеса. Поэтому камень, отделившись от колеса, всегда летит вперед. Распределение скоростей в колесе наглядно демонстрирует анимация

<http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/civroue.html>.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Мгновенный центр ускорений.**

**Распределение ускорений в плоской фигуре**

Мгновенным центром ускорений (***МЦУ) называется точка Q, ускорение которой равно нулю в данный момент***. Покажем, что МЦУ существует, если ,  не равны нулю одновременно. От вектора в сторону  отложим угол (Рис.8)



Рис.8

и проведем отрезок

Найдем ускорение точки Q

Очевидно, что отклонен под тем же углом от AQ , значит противоположно **.** По модулю они равны:



Значит

и

т.е. Q является мгновенным центром ускорений.

Если теперь за полюс выбрать МЦУ Q, то формула ускорения произвольной точки приобретет такой же вид, как при вращательном движении:

Это значит, что ускорения в плоской фигуре распределены так, как если бы она вращалась вокруг МЦУ Q (Рис.9). На прямой АМ, проходящей через МЦУ Q, ускорения параллельны и наклонены под углом к направлению на МЦУ Q. Модуль ускорения линейно зависит от расстояния до МЦУ.



Рис.11



Рис.10

Следует подчеркнуть, что в общем случае МЦС и МЦУ не совпадают.

Так у колеса, движущегося равномерно и без проскальзывания, МЦС находится в точке контакта с дорогой, а МЦУ в центре колеса. При этом и , значит, ускорения всех точек направлены к центру колеса (Рис.10).

Другим примером может служить стержень, конец А которого равномерно скользит по стене, а конец В по полу. Очевидно, что Q находится в точке А, а ускорения всех точек горизонтальны (как **W**B) и линейно зависят от расстояния до Q (Рис.11).

Таким образом формулы распределения скоростей и ускорений показывают, что плоское движение тела можно представить как результат сложения двух движений***:*** поступательного движения с полюсом А и сферического движения вокруг полюса

**Свободное движение тела**

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Скорость и ускорение точки тела.**

Рассмотрим свободное тело, движущееся относительно системы отсчета с осями *X Y Z* (Рис.12). Движение тела задано, если указан способ определения его положения в произвольный момент времени t. Для этого достаточно задать движение полюса А и вращение тела вокруг полюса. Как будет показано ниже (см. сферическое движение тела), вращение можно задать тремя углами Эйлера Шесть функций



ω

ε

являются ***законом свободного движения твердого тела***. Это значит, что свободное тело имеет 6 степеней свободы. Вспомним, что при поступательном движении тело имеет три степени свободы, при вращательном - одну и при плоском - три степени свободы.

Заметим, что из первых трех функций по формулам кинематики точки можно найти скорость  и ускорение  полюса А. Будет показано, как по функциям углов Эйлера можно найти угловую скорость **** и угловое ускорение **** тела.

***Скорость*** произвольной точки тела найдем по теореме о распределении скоростей

Продифференцировав теорему,найдем

# Учитывая, что

**- *угловое ускорение*** тела, а для вектора в теле по формуле Эйлера

получим формулу ***ускорения*** произвольной точки тела,

Последние два слагаемых уже встречались нам в плоском движении. Как и там, назовем их вращательным и осестремительным ускорениями точки М при ее вращении вокруг полюса А.

Таким образом формулы скоростей и ускорений показывают, что свободное ***движение тела можно представить как результат сложения двух движений: поступательного движения с полюсом А и сферического движения вокруг полюса***.